

GYÓRFI ZOLTÁN

Párhuzamos elnevezések

Tanács János *Ami hiányzik Bolyai János Appendixéből – és ami nem* című munkájának megkésett bírálata

Kezdjük a vizsgálódást azokkal az állításokkal, amelyek Tanácsnál is előfordulnak (részben tőle származnak) és vitathatatlanul helyesek (Tanács 2008):

(a) Bolyai az *Appendix* 1. §-ában definiál egy relációt, amit három függőleges vonallal jelöl: III. Bolyai ezt a jelet olyan, egy síkban fekvő *egyenese*k viszonyára vezeti be, amelyek bizonyos, speciális értelemben vett, nem-metsző helyzetben vannak. Tény, hogy az 1. §-ban nem szerepel a szó: *párhuzamos* (*parallel*). (Lásd: Bolyai 1973.)

(b) Bolyai bevezet egy másik, síkbeli *vonalak* és általános *felületek* bizonyos viszonyát kifejező kétvonalas relációjelet is: II. Kimutatható, hogy ezt a kétvonalas jelet Bolyai a „parallel/parallela” szavak helyett használja, méghozzá ekvidisztáns (egyenlőközü) értelemben.

Néhány mondatban összefoglalhatóak Tanács fő tézisei is. Az első így hangzik:

[...] azt állítom, hogy Bolyai az *Appendix* első paragrafusában nem használja a „párhuzamos” [...] kifejezést. Ergo: az inkriminált passzus nem tekinthető [...] a „párhuzamosság” [...] meghatározásának vagy értelmezésének. (Tanács 2008. 68. Ezeket a téziseket már Tanács 2001. is tartalmazza.)

A magabiztos *Ergo* meglepő. Egy elnevezés használatának hiányából nem következik az, hogy az éppen definiált fogalom *elnevezése* akkor vagy később nem a hiányzó szó volt vagy lesz.

A második fő tézist Tóth Imre Tanács könyvéhez írott előszavából idézem:

A „parallela” ekvidisztáns értelemben való Bolyai János-féle szerepeltetése pedig, mint ahogy arra Tanács rámutat, megcáfolja azt a szakirodalomban elterjedt nézetet is, amely szerint a nem-euklideszi geometria megalapítása nem lett volna lehetséges a párhuzamos-fogalom ekvidisztancia-jelentésének előtérbe állításával (Tanács 2008. 10).

A hiperbolikus geometria valóban nem jöhetett volna létre az euklideszi geometria hagyományos párhuzamosság fogalmában egyesülő két tartalmi elem: a *nem-metsző helyzet* és az *ekvidisztáns viszony* szétválasztása nélkül. Bolyainál és Lobacsevszkijnál világosan különválnak e két vonatkozás és az *ekvidisztancia*-jelentés nem kerül előtérbe. A „standard nézet” cáfolatáról tehát nem beszélhetünk.

Végül a harmadik fő tézis:

[...] a hiperbolikus geometriában mindketten [Bolyai és Lobacsevszkij] ugyanazokra a geometriai objektumokra használják a „párhuzamos” kifejezést vagy az adott nyelven neki megfeleltethetőt. (51.)

Továbbá:

[...] Bolyai és Lobacsevszkij egymástól lényegesen eltérő *fogalmi-terminológiai* rendszert alakított ki [...]. (136. *Kiemelés tőlem. Gy. Z.*)

Az utóbbi két állítás közül egyik sem igaz. Bolyai az *Appendix* 1. §-ában a háromvonalas *relációjelet* kizárólag abszolút *egyenespárok* esetében alkalmazza,¹ és nem használja ezek viszonyának jellemzésére a „parallel” kifejezést. Lobacsevszkij a „parallel” relációnevet pontosan úgy használja,² mint Bolyai a III jelet. Fogalmi eltérés tehát nincs. Ugyanakkor Bolyai kétvonalas jele és a kapcsolódó relációnév – *parallel* – más geometriai *dolog-párok* ekvidisztáns helyzetére utal.³ Az ilyen, ekvidisztáns helyzetű vonalakra viszont Lobacsevszkij nem használja a *parallel* kifejezést. Tehát a „parallel” elnevezést Bolyai és Lobacsevszkij *nem* ugyanazokra a dolgokra alkalmazták. Először úgy tűnik az *Ami hiányzik...* olvasójának, hogy Tanács nem veszi észre, hogy a két reláció (III és II) értelmezési tartománya különböző. De nem ez a helyzet: Tanács ugyanis megjegyzi, hogy Bolyai

[a] háromvonalas jelet a [bizonyos értelemben nem]⁴ metsző (fél)egyenesekkel összefüggésben, míg a kétvonalasat az egyenlő távolságú *L*-vonalakkal [...] kapcsolatban vezeti be. (123.)

¹ Abszolút = hiperbolikus vagy euklideszi, a párhuzamossági axióma megválasztásától függetlenül. Jelen dolgozatban, ha az *egyenes* szót használom a *hiperbolikus* vagy az *euklideszi* jelző nélkül, akkor mindig abszolút egyenesre gondolok.

² Van-e különbség *relációjel* és *relációnév* között? Nyilván nincs. Továbbá sem az nem kötelező, hogy egy *matematikai elnevezés*hez (nyelvi jelhez) *matematikai jel* is tartozzék, sem pedig az, hogy egy *matematikai jelnek neve, nyelvi jele* is legyen.

³ Egészen pontosan: A III jel is és a II jel is relációjel. Relációjelek dolgokból alkotott párokra vonatkoznak.

⁴ „Először nem-metsző”.

A két reláció értelmezési tartománya tehát Tanács szerint is különböző – legalábbis a kétvonalas jel első előfordulását illetően ő is így vélekedik. A kétvonalas jel *Appendix*-beli további előfordulásainak vizsgálatára később visszatérek.

Végül tekintsük Tanács mintegy mellékesen feltáruló nézetét a tudományos elméletek *fogalmi* és *terminológiai* rendszereit illetően:

[...] Bolyai és Lobacsevszkij egymástól lényegesen eltérő *fogalmi-terminológiai* rendszert alakított ki [...]. A „paralela” „ekvidisztáns” értelemben való Bolyai-féle használatára mellé állítva a „parallellinien” [...] Lobacsevszkij-féle használatát, a két *fogalmi-terminológiai* rendszer lényegi különbözőségét látjuk [...]. (136. *Kiemelés tőlem. Gy. Z.*)

A már említett részletektől függetlenül ez a két mondat rávilágít az *Ami hiányzik...* sorozatos félreértéseinek eredetére: Tanács egyenlőségjelet tesz egy matematikai elmélet *fogalmi* és *terminológiai* rendszere közé. Mi mást bizonyít a két szó (*fogalmi*, *terminológiai*) kötőjeles egybekapcsolása? Tanács azt sugallja, hogy Bolyai és Lobacsevszkij eltérő terminológiájából párhuzamosságelméletük fogalmi különbözőségére kell következtetnünk. Céлом, hogy Tanács téziseit eme *kötőjel* megalapozott kiiktatásával cáfoljam.

I. MATEMATIKA ÉS NYELV

Egyetemeken a matematikus hallgatókat olykor azzal szórakoztatják (kínózzák?) tanáraik, hogy kényszerítik őket: matematikai tételeket és érveléseket ne a megszokott szavak használatával mondjanak ki és vigyenek végig. Mi is ezt fogjuk most tenni. Kérem az olvasót, a bevezetendő furcsa elnevezéseken ne ütözzék meg. Kis játékunknak a szavakkal a mondanivaló szempontjából komoly jelentősége van. Tehát, a következőkben (egyre ritkábban persze) mondjunk *paszulykát* egyenes helyett, használjuk a *zúzmara* szót a merőlegességre, illetve derékszögre, és legyen a kör neve *ingyom-bingyom*, a háromszögé *fuszulyka*, metszés helyett pedig mondjunk *mihasználást*. Ezzel – például – az euklideszi geometria Thalész-tétele így hangzik:

Ha egy *ingyom-bingyom* valamely átmérőjének az *ingyom-bingyommal* való *mihasználó* pontjait *paszulykák* segítségével összekötjük az *ingyom-bingyom* egy, az előbbiekől különböző pontjával, akkor a *paszulykák* ebben a pontban *zuzmarációban mihasználnak*. Az ily módon *ingyom-bingyomba* írott *fuszulyka* tehát *zúzmaráns*.

A tételt kimondani ezen a nyelven *csupán* vicces, a bizonyítás azonban ilyen körülmények között komoly fegyvertény. Elismerem, a matematika *letisztult területein* a kreativitást nem igazán segíti ez az abrakadabra. Az elnevezéseknek ugyanis van jelentősége, főleg ha találóak. Igen, így van, de kizárólag *letisztult fogalmi rendszerrel* rendelkező területek *feltárása* során, de semmi esetre sincs így a bizonyításokban általában. A bizonyításokat ugyanis le kell tudni játszani az el-

nevezések összezavarásával is. Félre ne értsük: nem arról van szó, hogy egy-egy szótárat kell kívülről megtanulni az efféle gyakorlatok során, hanem arról, hogy a jó bizonyítások elvben úgy is elvégezhetőek, hogy az eredeti elnevezéseket és az azokhoz fűződő szemléleti tartalmat nem is ismerjük.⁵

Konkrétan: Bolyai az *Appendix* 1. §-ában a *paszulykák* bizonyos nem *mihasznáns* viszonyának jelölésére vezeti be a háromvonalas jelet, és nem kapcsol ehhez a relációhoz semmiféle elnevezést. Messzebb megy, mint szerénységem, amikor az egyenest *paszulykának*, a metszést *mihasználásnak* nevezem. Ő a mondott dolgok viszonyát az abszolút, majd a hiperbolikus geometria új keretrendszerében elég bátor egyáltalán el sem nevezni. Bolyai azt mondja, a *paszulykák*, ha így meg így állnak, akkor III-at írunk a jeleik közé. (Ezt így mondjuk ki: „három vonalat”). Bolyai nem akart itt semmiféle ismert kifejezést újrahasznosítani, mert modern matematikus lévén határozottan el akarta kerülni az esetleges, félrevezető és rejtett szemléleti-fogalmi utalásokat. Nyilván, mert tapasztalata szerint minden nyelvi kölcsönzés a szemantika zsákutcákból álló zsákfalujába vezet, legfőképp a vadonatúj fogalmak esetében. Sajnos a matematikán kívül tevékenykedők számára ez még ma sem teljesen világos.

Mire egy matematikai diszciplína letisztul, az elnevezésekben rejlő ellenőrizhetetlen konnotatívumhalmaz olyan sok próbán megy át, annyit csiszolódik, hogy a matematikus mintegy rábízhatja magát ezen elnevezésekre és a mögöttük sejlő szemléleti tartalomra. A nem-euklideszi geometriák megszületésekor viszont a *párhuzamos*, az *ekvidisztáns* és a *nem metsző* kifejezések mögöttes tartalma, látszólagos azonossága már több mint kétezer éve akadályozta a fejlődést.⁶ A geometria fogalomrendszere Bolyai, Lobacsevszkij és Gauss fellépéséig *nem tisztult még le* kellőképpen. A *szavakról* kiderült, hogy zavarják a gondolatokat. Ezért: vagy értelmetlen új szavakat, vagy nem-szavakat (puszta jelöléseket) kellett (volna) bevezetni az új fogalomhajtások esetében; de a *párhuzamos* szót az *ekvidisztáns* szótól élesen meg kellett különböztetni. Bolyai megelégedett azzal, hogy az egyenesek mondott, nem-metsző viszonyára nem talált ki valami addig nem használt elnevezést, és csak a definíciót adta meg, azaz csak az ismert fogalmak tükrében mutatta be az újat, nem tévén azt kimondhatóvá a definíció felmondása nélkül. Ugyanakkor az ekvidisztáns helyzetű, nem egyenes vonalú alakzatok esetére Bolyai megtartotta a *parallel* elnevezést, mert beletörődött a kétezer év alatt kialakult, kapcsolatos szemléletmódba.

⁵ Azokat a filozófiai háborgásokat most hagyjuk figyelmen kívül, amelyek a végsőkéig vitt matematikai formalizmus létjogosultságát vitatják. A nem-euklideszi geometria felfedezésére, jelen állapotára és fejlődéstörténetére ezek a viták nem sok hatással voltak.

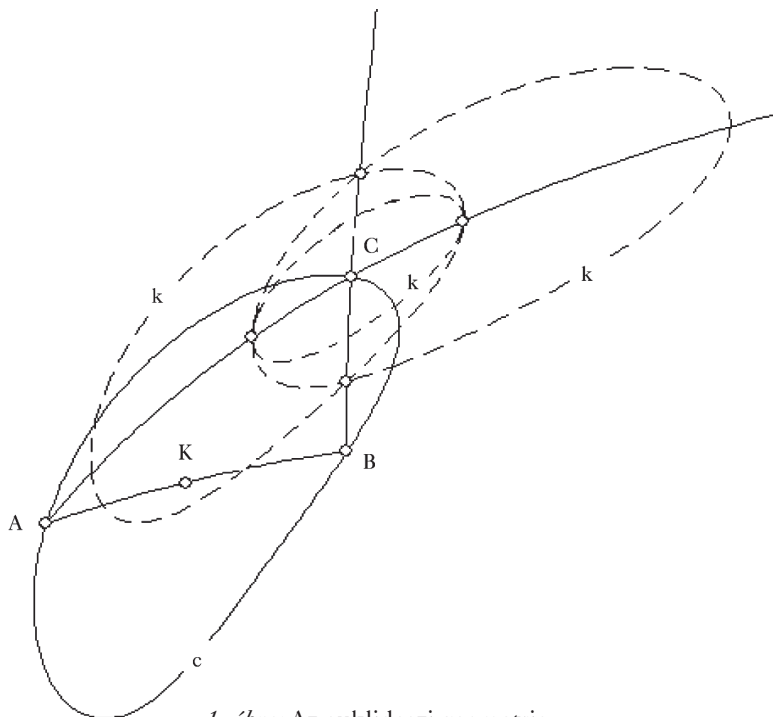
⁶ Salló Ervin írja: „Bolyai János szimboliztikája bonyolult kifejezéseket pótol. S ezt nemcsak a tömörség kedvéért teszi, hanem azért is, mert el akarja kerülni a szemléletességtől átítatott hagyományos terminológiát. [...] S joggal, hiszen az »Appendix« 1. §-ában meghatározott »párhuzamosság« tisztán logikai jellegű és összeegyeztethetetlen a párhuzamosságnak szemléletünk által megszokott, euklideszi meghatározásával.” (Salló 1974. 34–35.) Tanácsnak is ismernie kellett Salló véleményét, hiszen Tanács 2008. irodalomjegyzékében is szerepel az itt idézett mű.

Végül pedig álljon itt egy szép példa a matematikus és a nyelv elkeseredett küzdelmére. Találtam egy, ezúttal egyvonalas (l) esetet a 20. század elejéről:

We introduce the primitive idea $p \mid q$, which may be read „ p is incompatible with q ” [...] But [...] this way of reading $p \mid q$ [is] better avoided to begin with. The symbol „ $p \mid q$ ” is pronounced: „ p stroke q ”.⁷

II. GEOMETRIA ÉS SZEMLÉLET (TÜKRÖK ÉS GÖRBE TÜKRÖK)

Az előbbi szakaszban véghezvitt *onomoklasztázia* után most (csak a teljesség kedvéért) egy kis *ikonoklasztázia* következik: lerombolnám azt a szemléleti hagyományt, amely az euklideszi geometria *paszulykáit* és *ingyom-bingyomjait* egy bizonyos meghatározott módon diktálja láthatni. Az alábbi, 1. ábrán a Thalész-tételt mutatom be – mondjuk így – görbe tükörben.⁸



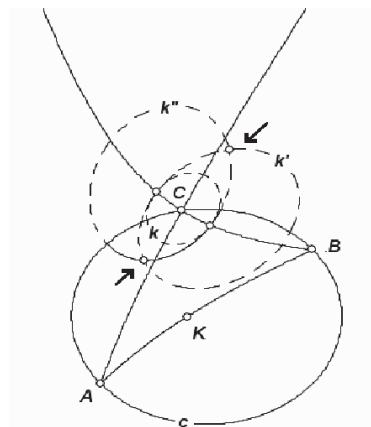
1. ábra: Az euklideszi geometria
Thalész-tétele görbe tükörben szemlélve

⁷ Whitehead–Russell 1967.

⁸ Ez a rajz az euklideszi síkgeometriának egy a hiperbolikus síkon modellezett változatán belül készült. Az euklideszi síkgeometria hiperbolikus síkon való jelen modellezésével kapcsolatban lásd például: Ramsay–Richtmyer 1995. 215–217. A hiperbolikus síkot pedig a szokásos euklideszi modellen belül az Ornoch modell szerint tekintem. Erre vonatkozóan lásd például Prażmowski 1986. és Dubikajtis–Guściora 1974.

Itt a *c* ingyom-bingyomba beírt *ABC* fuszulyka látható. Fuszulykánk egyik *paszulykája* (*AB*) átmegy a *c* kör *K* középpontján; a *C* pont pedig a *c*-n ül. A Thalész-tétel szerint *AC* *zúzmaráns* *BC*-vel. Ez utóbbi állítást a *C* körül látható szaggatott *ingyom-bingyomokkal* szerkesztett *zúzmaráció* sikere valószínűsíti.

Ha valaki azt kérdezné, mi értelme van ennek a morbid demonstrációnak, akkor a következő találás kérdéssel válaszolnék: ha görbe tükörben szemléljük egy szerkesztés menetét, akkor vajon mi kell ahhoz, hogy biztonsággal eldönthesünk: euklideszi körzővel és vonalzóval, avagy hiperbolikus körzővel és vonalzóval dolgozik-e geométerünk? Például: a Thalész-tétel ismerete elégséges tudás, mert ha a fenti *zúzmaráció* sikertelen, akkor bizonyára nem euklideszi geometriáról van szó. És ez ismét független a körökkel és a merőlegességgel kapcsolatos elnevezésektől és szemléleti tartalomtól, kizárólag a szóban forgó fogalmakat egymáshoz kapcsoló logikai struktúráról függ. Az alábbi 2. ábra, ahol hiperbolikus szerkesztő eszközöket használtam, ugyancsak ezt szemlélteti:



2. ábra: A Thalész-tétel hiperbolikus-geometriabeli érvénytelensége görbe tükörben szemlélve⁹

Lám, ezen az ábrán *AC* és *BC* *C*-beli *zúzmaranciája* kizárható:¹⁰ Nem igaz a Thalész-tétel, tehát nem euklideszi geometriáról van szó. És ezt nem azon az alapon állíthatjuk, hogy a körök a fenti ábrán „nem körök”, mert a körök az 1. ábrán „sem voltak körök” – legalábbis a választott tükörben nem látszottak köröknek.

⁹ Görbe tükörben – írom. Van a hiperbolikus geometriához „rendes” tükör? Érdekesebb a következő kérdés: Az euklideszi geometriának vajon „rendes” tükre a szokásos ábrázolás? Külön tanulmányt érdemelne a matematikai platonizmus jelen szövegben elrejtett értelmezése: Az „ideák” realitása nem csökkent megvalósulás, hanem tükörkép egy ismertnek vélt szemlélet görbe tükörében. Ebből következik, hogy tükreink „rendességéről” vagy „görbeségéről” nincs is értelme beszélni.

¹⁰ Az ábra rajzolásakor a hiperbolikus geometria úgynevezett (kevésbé ismert) Ornoch modelljét használtam (lásd a 8. lábjegyzetet).

Bolyai, Lobacsevszkij és Gauss nagysága éppen abban áll, hogy a tudománytörténetben először próbálkoztak sikerrel a szokásos nevezéktan és a megszokott szemlélet feladásával. A geometria kapujára ma ezt kellene írunk: Aki nem képes az elnevezésektől megszabadulni, vagy nem képes görbe tükörben is látni, amit látni kell, az itt ne lépjen be. Sajnos, Tanács János számára fontosabbnak tűnik a „paralela”, mint elnevezés és az ehhez az elnevezéshez kapcsolódó hagyományos szemlélet, mint a háttérben húzódó logikai tartalom.

III. BOLYAI \parallel JELÉNEK ELŐFORDULÁSAI AZ *APPENDIX*BEN

Tanács csak a paraciklusokat (horociklusokat / horiciklusokat) említette a \parallel jel *Appendix*beli használata dolgában. A kétvonalas jel először valóban a 22. § utolsó mondatában bukkan fel: „Designetur tale l per $l \parallel L$ ”. Magyarul: „Ilyen l így jelöltessék: $l \parallel L$ ”.¹¹ Itt, mint a szövegkörnyezetből kiderül l is és L is L -vonalak, és nem egyenesek. A kétvonalas jel definíciójában (első megjelenésekor) tehát szó sincs egyenesekről.

A következő, 23. § mindjárt az új, nem egyenesekre vonatkozó jelölés felhasználásával kezdődik. A 24. §-ban is előfordul a kétvonalas szimbólum ugyancsak nem egyenesekre, hanem horociklusokra (L -ekre) vonatkozóan. Ugyanez áll a kétvonalas jel 24. §-beli, második előfordulására is.

Eddig L -párokról volt szó mindig, amikor \parallel megjelent. A 27. §-ban a \parallel jel egyenesek és azokkal egyenközű (ekvidisztáns) „parallel” vonalak (a hiperbolikus geometriában nem egyenesek!) közötti reláció jeleként lép föl: „Via dicta cd denotabitur per $cd \parallel ab$ ”. Magyarul: „A mondott cd út $cd \parallel ab$ -vel jelöltetik majd”.

Akkor értjük meg a $cd \parallel ab$ jelölés mögötti geometriai tartalmat, ha visszatérünk a 27. § elejére, a cd út definíciójához: „[s]i ac , bd sint $\perp ab$, et feratur cab juxta ab ; erit (via puncti c dicta heic cd)”. Vagyis: „[h]a ac és bd $\perp ab$ és cab eltolatik ab mentén (a mondott c pont útja pedig cd)”.

Itt \perp a merőlegesség jele. Arról van szó tehát, hogy az ac és bd merőlegesek az ab (egyenesre) és a merev cab együtttest eltoljuk ab mentén; ekkor a c pont útja, amit cd -vel jelölünk... Ez éppen a távolságvonal (ekvidisztáns) definíciója. Bolyai szűkszavúsága már-már felháborító: egyszerűen nem törődik az olvasóval, akinek éppen a hiperbolikus geometria egyik legfontosabb tényével kell szem-

¹¹ Bolyai elnevezésektől való idegenkedését mi sem bizonyítja jobban, mint az, ahogyan a hiperbolikus geometria egyik kulcsfogalmát (paraciklus/horociklus/horiciklus, mely a hiperbolikus geometriában nem egyenes) egyszerűen L -nek nevezi. Bolyai ráadásul az itt idézett definícióban a fogalom nevét és az egyik c fogalom alá eső objektum nevét meg sem különbözteti.

között nem lehetséges ekvidisztáns kapcsolat a hiperbolikus geometriában, Bolyai nem is ad okot félreértésre azzal, hogy a kétvonalas jelet ekvidisztáns értelemben szerepelteti.

IV. A III JEL TOVÁBBI SORSA

Amint Tanács is rámutat, az *Appendix* újraközléseiből és fordításából többnyire már hiányzik Bolyai háromvonalas jele. Ugyanígy, a nem euklideszi geometriával foglalkozó korszerű közlemények sem alkalmazzák ezt a jelölést. Azt mutatja ez, hogy a II jel és a III jelentése végeredményben ugyanaz? Nem. Egyszerűen arról van szó, hogy mivel a két jel kizárólag különböző típusú objektumok (dolog-párok) esetében használatos, a jelölésbeli különbségtétel megszüntetése félreértésekre már nem adhat okot. Bolyai idejében azonban nagyon lényeges lehetett az egyenesek közötti nem-metsző értelemben vett relációt a jelölés szintjén is megkülönböztetni az ekvidisztanciát jelölő és az *Appendix*-ben soha nem hiperbolikus egyenes párok viszonyát kifejező II jelöléstől. Mindez azért lehetett fontos Bolyainak, mert az euklideszi geometriában, és csakis az euklideszi geometriában, az egy síkban fekvő egyenesekre vonatkozó nem metsző viszony egyben ekvidisztanciát is jelent.¹³ Az utánközlőknek azonban nem lett volna szabad a fent megmagyarázott kényelmesebb jelölésmódot alkalmazniuk. Ezzel ugyanis lehetetlenné tették azt, hogy az *Appendix* mai olvasója világosan lássa: Bolyai megmaradt a parallel szó használatánál az ekvidisztancia verbalizálására és egy új, nem kimondható (legfeljebb így: „háromvonalas”) jelölést vezetett be a síkbeli, speciális módon nem metsző egyenesek közötti viszony kifejezésére.

Mit bizonyít mindez? Semmi esetre sem azt, hogy

[...] a nem-euklideszi geometria megalapítása nem lett volna lehetséges a párhuzamos-fogalom ekvidisztancia-jelentésének előtérbe állításával (Tanács 2008. 10. Tóth Imre előszava).

Azt viszont világosan kell látni, hogy Tanács ezt a nézetet kettőszázegy oldalas tanulmányában nem cáfolja meg azzal, hogy bemutatja: Bolyai parallel (ekvidisztáns) értelemben használja a kétvonalas jelet, és lám: mégis felfedezi hiperbolikus geometriát.

Ugyanakkor, ha Tóth vagy Tanács pontosan fogalmaz, és a bevezetésben idézett fő tételben határozottan *egyenesekről* beszél, akkor egyszerű matematikai belügy lenne azt bizonyítani, hogy egyenesekre vonatkozóan az „ekvidisztancia

¹³ Az abszolút geometriában pedig nincs eldöntve, hogy ez mit jelentsen. A jelölésbeli megkülönböztetés tehát ott sem okozhat félreértést.

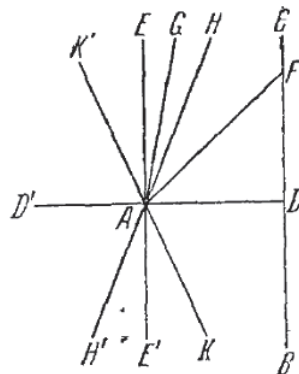
= *nem metszés*” alapú megközelítés lehetetlenné teszi a hiperbolikus geometria felfedezését. Az, hogy Euklidész V. posztulátuma (XI. axiómája) egyenesekre vonatkozóan ekvivalens a „*ha egyeneshez ekvidisztáns, akkor egyenes*” állítással, Bolyai és Lobacsevszkij idejében már kétezer éve ismert tény volt.

V. LOBACSEVSZKIJ ÉS BOLYAI ÚJ PÁRHUZAMOSSÁG-FOGALMÁNAK LÉNYEGI EGYBEESÉSÉRŐL

Tanács különbséget tesz Lobacsevszkij és Bolyai párhuzamosság-fogalma között. Ilyen, említésre méltó, lényegi különbség nincs, csak szóhasználatbeli különbség van. Lobacsevszkij, mint közismert, a párhuzamos / parallel szót használja az új fogalom, a nem metsző értelemben vett párhuzamosság elnevezésére, és nem használja ezt a szót általában az ekvidisztancia jelölésére. (Magyarul lásd: Lobacsevszkij 1951.) A fentiekben már láttuk, hogy Bolyai nem nevezi el a nem-metsző értelemben vett párhuzamosságot és a parallel szót *tartja meg* a (hiperbolikus geometriában nem egyenesek közötti, egyenlőközűség / ekvidisztancia) „parallelizmus” jelölésére.

Hasonlítsuk most össze a két kutató, Bolyai és Lobacsevszkij által adott definíciót a nem-metsző értelemben vett párhuzamosság fogalmának bevezetésekor. Lobacsevszkij ezt írja:¹⁴

16) Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на *пересекающие* ее и *непересекающие*.³ Граничная линия одного и другого классов этих [прямых] линий называется *параллельной* заданной линии [8].



Черт. 1.

5. ábra: Lobacsevszkij párhuzamosság definíciója és magyarázó ábrája.

¹⁴ Lobacsevszkij itt idézet műve eredetileg németül íródott. Én mégis jobban szeretem az orosz fordítást, mert híven tükrözi a Lobacsevszkij korábbi műveiben kialakult szóhasználatot, lásd: Lobacsevszkij 1945.

Ennek a meghatározásnak az a lényege, hogy egy adott síkban, egy egyenes vonatkozásában, egy az ugyanebben a síkban fekvő ponton keresztül, és szintén ugyanebben a síkban fekvő egyenesek két osztályba sorolhatóak: (1) azok, amelyek nem metszik az első egyenest (*nyepereszekajuscije*) (2) és amelyek metszik azt (*pereszekajuscije*). A két osztály közötti, határhelyzetben levő vonalat (*granyicsnaja linyija*) nevezi Lobacsevszkij párhuzamosnak.

Bolyai az *Appendix* 1. §-ában így fogalmaz:

§ 1. (Fig. 1.) Si rectam \tilde{am} non secet plani ejusdem recta \tilde{bn} , at secet quaevis \tilde{bp} (in \tilde{abn}): designetur hoc per $\tilde{bn} ||| \tilde{am}$. Dari talem \tilde{bn} , et quidem unicam, e quovis puncto \tilde{b} (extra \tilde{am}), atque $\tilde{bam} \nmid 2R$ esse patet: nam \tilde{bc} circa \tilde{b} mota, donec $\tilde{bam} \nmid 2R$ fiat, \tilde{bc} ex \tilde{am} aliquando primum exit, estque tunc $\tilde{bc} ||| \tilde{am}$. Nec non patet esse $\tilde{bn} ||| \tilde{em}$, ubi vis sit e in \tilde{am} (supponendo in omnibus talibus casibus esse $\tilde{am} > \tilde{ae}$). Et si, puncto c in \tilde{am} abeunte in infinitum, semper sit $\tilde{cd} = \tilde{cb}$: erit semper $\tilde{cdb} = (\tilde{cbd} < \tilde{nbc})$; ast $\tilde{nbc} \sim o$; adeoque et $\tilde{adb} \sim o$.

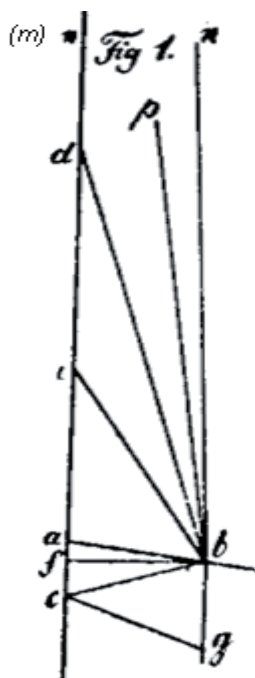
6. ábra: Az *Appendix* 1. paragrafusa.

Vagyis

1. § (1. ábra) Ha az \tilde{am} egyenest az ugyanabban a síkban fekvő \tilde{bn} egyenes nem metszi, de metszi azt minden (az \tilde{abn} -ben levő) \tilde{bn} : jelölje ezt $\tilde{bn} ||| \tilde{am}$. Világos, hogy ilyen \tilde{bn} létezik és csak egyetlenny, mégpedig bármely (\tilde{am} -en kívül fekvő) \tilde{b} pontból s nyilvánvalóan $\tilde{bam} + \tilde{abc}$ nem $> 2R$; ugyanis ha \tilde{bc} -t mindaddig forgatjuk \tilde{b} körül, mígnem $\tilde{bam} + \tilde{abc} = 2R$ lesz, \tilde{bc} valamikor legelőször nem metszi \tilde{am} -et, és akkor $\tilde{bc} ||| \tilde{am}$. [...] ¹⁵

Nyilvánvaló, hogy az először nem metsző egyenes elválasztja egymástól a metsző egyeneseket és a nem metszőket, vagyis „granyicsnaja” helyzetben van. Az 1. § első bekezdéséhez tartozó ábra pedig így fest:

¹⁵ Az 1. §-t most Tóth Imre fordításában közlöm (Bolyai 1953, idézi Tanács 2008. 185). Ezt a fordítást olvasva igazán meglepő, hogy Tóth később Tanács könyvéhez lelkes előszót írt.



7. ábra: Az Appendix 1. ábráját érdemes összevetni Lobacsevszkij 1. ábrájával (5. ábra).¹⁶

Ez az ábra is, és a meghatározás is igencsak hasonlatos a Lobacsevszkij által adotthoz. Bolyai az *ekvászto* és egyben *először nem metsző granyicsnaja linyiját* *bn*-nel jelöli.

A két definíció között matematikai értelemben nincs lényegi különbség.¹⁷ Van viszont egy lényegtelen különbség, amely a jelen dolgozat mondanivalóját illetően mégis fontos. Lobacsevszkij a párhuzamos (*paralleli*) szót itt bevezeti a leírt, határhelyzetben levő (először nem metsző) egyenes(ek) viszonyára, Bolyai pedig éppen itt, az új fogalom bevezetésekor nem használja ezt a szót, egyáltalán nem használ szót; egy új jelölés, a háromvonalas szimbólum használatát javasolja. A parallel kifejezést, mint fentebb részletesen elemeztem, Bolyai sohasem használja hiperbolikus egyenes párokra, nála a parallelizmus nem hiperbolikus egyenes párok között értelmezett, de ekvidisztanciát jelöl.

¹⁶ Az ábrán az *m* olvasat a helyes.

¹⁷ Kagan idézett írásában megjegyzi: „Az természetesen bizonyításra szorul, hogy ilyen egyenes létezik-e.” (Lobacsevszkij 1951. 84. 8. jegyzet). Amint fentebb láttuk, Bolyai próbálkozik is ilyen bizonyítással. Kagan az *A* centrumú (Bolyainál *b*) sugársor folytonosságára hivatkozik, Bolyai pedig arra, hogy miközben forgatjuk a *bc*-t *b* körül, az egyszer csak először lesz nem metsző.

Lobacsevszkij az egyenlőközű vonalak (például horociklusok) esetében nemul el. Ő ezek párhuzamosságára vonatkozóan nem vezet be sem elnevezést, sem jelölést. Meggyőződésem, hogy a két kutatót ugyanaz a megfontolás vezette: Az euklideszi geometria egyenesei esetében egybeeső ekvidisztancia-parallelizmus és a fenti értelemben vett nem-metsző-parallelizmus viszony az abszolút geometriában felhasad. Az egyik új fogalmat legalább némán kell használni (vagy ki kell találni egy nyelvileg gyökértelen elnevezést), mert nagy a veszélye a félreértéseknek; legalábbis a 19. század első felében, az új geometria felfedezésének korában még ez volt a helyzet. Mindebből semmiképpen sem következik a két, Bolyai- és Lobacsevszkij-féle „hiperbolikus párhuzamosság”-fogalom különbözősége.

VI. BOLYAI ÉS LOBACSEVSZKIJ ELNEVEZÉSEINEK LÉNYEGTELEN KÜLÖNBÖZŐSÉGÉRŐL

Vajon miért használta különbözőképpen a két nagy geométer a *parallel* szót? Egyetlen magyarázatot tudok elképzelni: Bolyai esetében a *parallelus*/*parallela* latin szavak köznyelvi jelentése határozta meg a névválasztást. Amint a Páriz-Pápai szótárban olvashatjuk:

pārellēlus, i Gr.: *Egymáshoz bép rend[d]el, Egyaránt való közben vetéjfel helyhez-tetett.*¹⁸

Ne feledjük, hogy a 19. század elején a művelt magyar nemesség a latin nyelvet szinte második anyanyelvként használta, és Nyugat-Európa tudományos nyelve is a latin volt még akkor. Bolyai szókincsében a *parallela* szónak inkább az egyenközűséghez, mint a szó komplexebb geometriai jelentéséhez lehetett köze.

Lobacsevszkij köreiben a latin nyelv nem fonódott össze az anyanyelvvél, ő szabadabban választhatott szót az új párhuzamosság-fogalom nyelvi jelölésére. Feltehető, hogy Lobacsevszkij a *parallel* szót sokkal inkább geometria szakszónak érezte; számára ennek a szónak valószínűleg nem volt hétköznapi használati értéke. Bár *Plutarchi Vitae Parallelae* (*Plutarkhu Bioi Parálleloi*) az ő polcán is ott heverhetett. A *Párhuzamos életrajzok* korabeli orosz fordításának címe azonban *Plutarkhovi szravnyityelnije zsziznyeopiszanyija* (Plutarkhosz 1810).

Az orosz címben tehát nem szerepel a *parallelj* szó. Ebből is arra következtethetünk, hogy Lobacsevszkij nyelvérzéke a *parallelj* szót nem feltétlenül kötötte egyfajta „*Egymáshoz bép rend[d]el, Egyaránt való közben vetéjfel helyhez-tetett*” jelentéshez. Legalábbis sokkal kevésbé, mint ahogy az a Bolyaiak esetében valószí-

¹⁸ Pápai Páriz 1708/1782/1995. A szótárnak mind 1708-as, első, mind 1782-es kiadásában ugyanezt találjuk. (Van szerencsém mindkét kiadás egy-egy példányát a könyvtáramban őrizni.)

núsítható. A mai orosz anyanyelvi beszélő a *szravnyityelnij* szót hétköznapi,¹⁹ a *parallelj(nij)* szót pedig matematikai szakszónak érzi, azzal a megjegyzéssel, hogy valami hasonlót jelentenek, de stílusértéküket tekintve nem felelserélhetőek. Ezt Lobacsevszkij is így gondolhatta, ha gondolt egyáltalán erre. Matematikai szempontból azonban ez az érvelés semmiféle jelenetösseggel nem bír; fölösleges szócséplés.

VII. ÖSSZEFOGLALÁS

Az ekvidisztáns viszonytól elkülönülő és a hiperbolikus geometria felfedezéséhez vezető (*abszolút*) *párhuzamosság* fogalmát Bolyai és Lobacsevszkij lényegében ugyanúgy definiálta. Bolyai az „először nem metsző”, Lobacsevszkij pedig a „határhelyzetben levő” vonatkozást emelte ki két egy síkban fekvő egyenes párhuzamos viszonyának definiáló jellemzésére. Bolyai nem vezetett be elnevezést erre az új fogalomra, bevezetett azonban egy jelölést: III. Bolyai jelölését ma már nem használjuk. Lobacsevszkij az euklideszi geometriából megörökölt *párhuzamosság* szót választotta az újonnan definiált fogalom elnevezésére.

Az ekvidisztáns helyzetben levő vonalak (a hiperbolikus geometriában soha nem egyenes párok) elnevezésére Bolyai megtartotta a *parallel* szót és a II jelet. Lobacsevszkij nem vezetett be külön elnevezést és jelölést erre az esetre. A modern matematikai nyelv és jelölésrendszer megengedi a *párhuzamos* szó és a II jel használatát a hiperbolikus és az euklideszi geometriában egyaránt. Félreértésre ez ma már nem adhat okot.

Remélem, hogy ez a rövid összefoglalás véglegesen lezár minden olyan lényegyet érintő tudománytörténeti/tudományfilozófiai vitát, ami Bolyai és Lobacsevszkij szóhasználatával vagy szimbólumhasználatával kapcsolatos.

Végül megkockáztatom kijelenteni, hogy Bolyai és Lobacsevszkij negatív recepciója nagyban köszönhető annak, hogy a *parallel* szót egyáltalán megtartották, ha nem is ugyanarra használták ezt a szót. Ilyen forradalmi újítás esetében, mint az övék, teljesen el kellett volna szakadni a hagyományos elnevezésektől. Akkoriban azonban még elfogadhatatlan lett volna *paszulykák nem-mihasznáns* viszonyáról beszélni. Ma már talán elfogadott? Vagy még mindig az elnevezések nyelvérzék diktálta zavaros szemantikai erőterében élünk?

¹⁹ szravnyity 'összehasonlítani'; szravnyivaty 'összevetni'; szravnyityeljno 'aránylag, viszonylag'. Vajon mi lehet a szrav*? Nézzük az 'sz' nélkül: ravno 'egyformán'; ravnyina 'síkság'; ravvensztvo 'egyenlőség'; ravnomerno 'egyenletesen'. Megtaláltuk az összefüggést: szravnomernij, paralleljnij, nem más, mint 'szép egyenletességgel, egyaránt helyzetetett'.

IRODALOM

- Bolyai János élete és műve. 1953. Bukarest, Tudományos Kiadó.
- Bolyai János 1973. *Appendix. A tér tudománya*. Szerk. Kárteszi Ferenc. Budapest, Akadémiai.
- Dubikajtis, Lech – Henryk Guściora 1974. On relationships between certain models of Lobatshevsky's geometry. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Gdańskiego – Matematyka*, 2. 5–20.
- Lobacsevszkij, Nyikolaj Ivanovics 1945. *Geometrieszkie issledovanyija pa tyeorii paralelnih linyii*. Moszkva, Akademii Nauk.
- Lobacsevszkij, Nyikolaj Ivanovics 1951. *Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből*. Szerk., kommentár, függelék: Vjenjamine Fjodorovics Kagan; ford. Bizám György. Budapest, Akadémiai.
- Pápai Páriz Ferenc 1708/1782/1995. *Dictionarium Latino–Hungaricum et Hungarico–Latino–Germanicum*. A hasonmás szövegét gond. Hargittay Emil, Kecskeméti Gábor, Thimár Attila. Budapest, Universitas.
- Plutarkhosz 1810. *Plutarchovi szraznyityelnje zsziznyeopiszanyija*. Ford. Szpiridon Gyesztunyisz. Sankt-Peterburg, Snor.
- Prażmowski, Krzysztof 1986. Incidence structures with hyperbolas on affine plane. *Zeszyty Naukowe Geometria*, 15. 49–58.
- Ramsay, Arlan – Robert D. Richtmyer 1995. *Introduction to hyperbolic geometry*. Berlin, Springer.
- Salló Ervin 1974. A geometria két évezrede (Tudománytörténeti vázlat Euklidész előzményeitől Bolyai János utánig). In Neumann Mária – Salló Ervin – Toró Tibor *A semmiből egy új világot teremtettem...* Temesvár, Facla. 34–35.
- Tanács János 2001. Rejtőzködő párhuzamosság. *Magyar Filozófiai Szemle* 45/4. 473–489.
- Tanács János 2008. *Ami hiányzik Bolyai János Appendixéből – és ami nem. A Bolyai-féle „parallela” rekonstrukciója*. Budapest, L'Harmattan.
- Whitehead, Alfred North – Bertrand Russell 1967. *Principia Mathematica, to *56*. Cambridge, Cambridge University Press.